සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

№ 19302

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1991 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(01). ශුද්ධ ගණිතය I
(01) Pure Mathematics 1

01	
S	I

පැය තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $$f(r) = \frac{1}{r^2} \quad (r \neq 0) \quad \text{නම්,}$$

$$f(r+1) - f(r) = -\frac{(2r+1)}{r^2(r+1)^2}$$

බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,

$$\frac{3}{1^2 . 2^2} + \frac{5}{2^2 . 3^2} + \frac{7}{3^2 . 4^2} + \dots$$

ශ්‍රේණියේ පළමුවැනි පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න.
ඉහත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ උත්තරයට හේතු දක්වන්න.

(ii) $|x| < 1$ සඳහා,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

ප්‍රතිඵලය උපකල්පනය කිරීමෙන්

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

බව පෙන්වන්න.

$\frac{1}{r(r+1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කිරීමෙන්,

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

බව පෙන්වන්න.

$n \to \infty$ විට, $S_n \to 1 - \ln 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

2. (i) $x - 4 < x(x-4) \leqslant 5$ වන පරිදි වූ x හි අගය පරාස සොයන්න.

(ii) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}n(e^x + e^{-x})$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $n \ (\geqslant 2)$ යනු නියතයකි.

$t = e^x$ යැයි ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

(අ) y හි අඩුතම අගය $\sqrt{n^2 - 1}$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $k > \sqrt{n^2 - 1}$ නම්, $y = k$ සමීකරණයට, t සඳහා තාත්ත්වික මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වා එම මූල සොයන්න.

(ඉ) $k = \sqrt{2n(n+1)}$ විට, ඉහත මූල දෙකෙන් වඩා විශාල මූලය $1 + \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ බව පෙන්වා, වඩා කුඩා මූලය ලියන්න.

ඉහත දක්වූ අවස්ථාවෙහි දී, $y = k$ සමීකරණය සපුරාලන x හි තාත්ත්වික අගයන් දෙක, $n \ (\geqslant 2)$ හි කවර අගයක් සඳහා වුව ද,

$\log_e\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$ සහ $\log_e(\sqrt{2} + 1)$ අතර පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (i) $f(x, y, z) \equiv x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$ හි සාධකයක් $(x - y)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, ප්‍රකාශනය පූර්ණ ලෙස සාධකවලට බිඳින්න.

x, y, z වූකලී ඒවායෙන් කිසිදු දෙකක් එකිනෙකට සමාන නොවන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම්, $f(x, y, z)$ ශූන්‍ය විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $ax^3 + bx + c$ ප්‍රකාශනයට $x^2 + px + 1$ ආකාරයේ සාධකයක් ඇත් නම්, $a^2 - c^2 = ab$ බව පෙන්වන්න.

මෙම අවස්ථාවෙහිදී, $ax^3 + bx + c$ සහ $cx^3 + bx^2 + a$ ප්‍රකාශනවලට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න.

4. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය උපකල්පනය කරමින්, සෘණ නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා එය සාධනය කරන්න.

(i) මතු දැක්වෙන දෑ සුළු කිරීම සඳහා, ඉහත ප්‍රමේයය භාවිත කරන්න.

(අ) $(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3 \ (\cos \theta + i \sin \theta)^2$

(ආ) $(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \ (\cos 4\theta - i \sin 4\theta)$

(ii) $(\sqrt{5} + 2i)^n$ යන්න $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි n නිඛිලමය වන අතර θ යනු $\sin \theta = \dfrac{2}{3}$ වන පරිදි වූ සුළු කෝණයක් වේ.

ඒ නයින්, සියලුම n සඳහා

$$(\sqrt{5} + 2i)^n + (\sqrt{5} - 2i)^n$$

තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

$n = 6$ විට මෙම ප්‍රකාශනයෙහි අගය සොයන්න.

5. z_1, z_2, z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනෙහි පිළිවෙලින් P_1, P_2, P_3 ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ.

$\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි මාපාංකය සහ විස්තාරය ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න.

තව ද, z_1', z_2', z_3' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනෙහි පිළිවෙලින් P_1', P_2', P_3' ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ.

$$\frac{z_1' - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{z_2' - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_3' - z_2}{z_1 - z_2} \text{ නම්,}$$

එවිට $P_2 P_3 P_1'$, $P_3 P_1 P_2'$, $P_1 P_2 P_3'$ ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව සාධනය කරන්න.
තව ද, $P_1 P_2 P_3$ සහ $P_1' P_2' P_3'$ ත්‍රිකෝණයන්ට එක ම කේන්ද්‍රකයක් ඇති බව ද සාධනය කරන්න.

6. (i) *ENGINEERING* යන වචනයේ අක්ෂර සියල්ල යොදා ගැනීමෙන් ලබා ගත හැකි සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ඒවා අතුරින් කොපමණ සංඛ්‍යාවක E අක්ෂර තුන ම එකට එක්ව පිහිටා තිබේ ද? කොපමණ සංඛ්‍යාවක ඒවා මුලටම පවතී ද?

(ii) පත්‍රිකා 32 කින් සමන්විත කාණ්ඩයක පත්‍රිකා 8 ක් කළුපාට ද, 8 ක් රතුපාට ද, 8 ක් නිල්පාට ද 8 ක් කොළපාට ද වේ. එක ම පාට පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වේ.

(අ) එම කාණ්ඩයෙන් පත්‍රිකා තුනක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගත හැකි විවිධ ආකාර ගණන සොයන්න.

(ආ) (අ) හි වූ තේරීම් අතුරින්, පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වූ පාටවලින් නොපවතින සේ වූ තේරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(සැ. යු. සියලු ම ආගණන කාර්ය පැහැදිලි ව දැක්විය යුතු වේ.)

7. ධන නිඛිලමය දර්ශකයන් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර එය සාධනය කරන්න.

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r \, {}^nC_r \, x^{r-1} = n(1 + x)^{n-1}$

බව පෙන්වන්න.

(ii) $n(1 + x)^{n-1}$ සහ $(1 + x)^n$ හි ප්‍රසාරණවල ගුණිතය සැලකීමෙන්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r \, ({}^nC_r)^2$ යන්න $n(1 + x)^{2n-1}$ ප්‍රසාරණයේ x^{n-1} හි සංගුණකයට සමාන බව පෙන්වන්න.

(iii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r \, ({}^nC_r)^2 = \frac{(2n - 1)!}{\{(n - 1)!\}^2}$

බව අපෝහනය කරන්න.

8. (i) u සහ v යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත නම්, u, v සහ ඒවායේ ව්‍යුත්පන්න ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}(uv)$ සඳහා සූත්‍රයක් ප්‍රමූලධර්මවලින් ලබා ගන්න.

(ii) $y = \frac{u}{v}$ නම්, ලඝුගණක ගෙන අවකලනය කිරීමෙන්

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) $$y = \frac{u_1 \; u_2 \; \ldots \; u_n}{v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_n}$$ නම්,

$$\frac{dy}{dx} = y \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx} - \frac{1}{v_i}\frac{dv_i}{dx} \right)$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි u, v ආදිය x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත වේ.

(iv) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$ යන්න $\tan^{-1} x$ විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

9. (i) $$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $$\int_0^\pi x \sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^n x\,dx$$

බව පෙන්වන්න ; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.
තව ද, $n \geqslant 2$ විට,

$$n \int_0^\pi \sin^n x\,dx = (n - 1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x\,dx$$

බව ද පෙන්වන්න.
එනයින්,

$$\int_0^\pi x \sin^4 x\,dx \quad \text{සහ} \quad \int_0^\pi x \sin^5 x\,dx$$

අගයන්න.

(ii) $\frac{d}{d\theta} \log_e (\sec\theta + \tan\theta) = \sec\theta$ බව පෙන්වා

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$ සෙවීමට එය භාවිත කරන්න.

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{2x^2 + 6x + 5}}$$ ඇගැයීම සඳහා

$$y = \frac{\sqrt{2x^2 + 6x + 5}}{x + 2}$$ ආදේශය භාවිත කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. $y = \tan^{-1} x$ නම් $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ සහ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ රාශි x ඇසුරෙන් සොයන්න.

x^3 පදය තෙක්, $\tan^{-1} x$ හි මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.

තව ද, සියලු ම තාත්ත්වික x සඳහා, $y = \tan^{-1} x$ හි $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ ප්‍රස්තාරයේ කටු සටහනක් ඇඳ වක්‍රයේ වැඩිමතම බෑවුම සඳහන් කරන්න. එම සටහනෙහිම, $y = kx$ රේඛාව ද අඳින්න ; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

ඒ නයින්, $\tan^{-1} x = kx$ සමීකරණයට

(අ) ප්‍රභින්න මූල තුනක් තිබීම සඳහා,

(ආ) එක් මූලයක් පමණක් තිබීම සඳහා,

k හි අගයන් පිහිටිය යුතු පරාස ලියන්න.

$\tan^{-1}x$ සඳහා ඔබ ලබා ගත් මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්, $12 \tan^{-1} x = 11x$ සමීකරණයට 0.5 ට ආසන්න වූ මූලයක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

11. C වක්‍රයක් $x = t + 1$, $y = t^3 - t$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලැබේ.

(i) C හි හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයා ඒ එක එකක් අනුරූප වන්නේ උපරිමයකට ද අවමයකට ද නතිවර්තනයකට ද යන්න සඳහන් කරන්න.

(ii) C හි කටුසටහනක් අඳින්න.

(iii) ඒ නයින්,

(අ) $x = t^3 - t$, $y = t + 1$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලබන C' වක්‍රයේත්,

(ආ) $x = t + 1$, $y = |t^3 - t|$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලබන C'' වක්‍රයේත් කටුසටහන් අඳින්න.

12. $y^2 = 4x$ පරාවලයේත් $x^2 - y^2 = 1$ බහුවලයේත් $x = 4$ රේඛාවෙහිත් දළ සටහන් එක ම රූ සටහනෙහි අඳින්න.

(i) $x^2 - y^2 - 1 \leqslant 0$ සහ $y^2 - 4x \leqslant 0$ වන සේ වූ S_1 පෙදෙස සටහන් කර, S_1 හි පර්යන්තගත වර්ගඵලය නිර්ණය කරන්න.

(ii) S_2 යනු $y^2 = 4x$ පරාවලයෙන් හා $x = 4$ රේඛාවෙන් පර්යන්තගත පෙදෙසයි. S_2 වර්ගඵලය, $x = 4$ රේඛාව වටා සෘජු කෝණ හතරකින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයේ පරිමාව සොයන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

19302

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1991
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(01) ශුද්ධ ගණිතය II (01) PURE MATHEMATICS II	01 S II

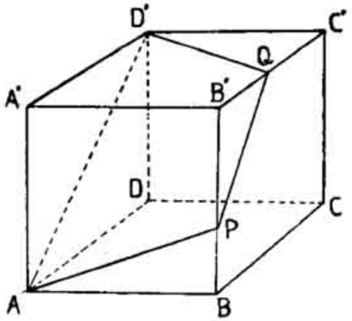
පැය තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. D, E, F යනු ABC ත්‍රිකෝණයෙහි පිළිවෙලින් BC, CA, AB පාද මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වන විට AD, BE, CF රේඛා ඒකලක්ෂ්‍ය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සඳහන් කර එය සාධනය කරන්න.

ඉහත අවශ්‍යතාව සැපිරේ නම්, DA, EB සහ FC ට සමාන්තර ව පිළිවෙලින් $B'C'$, $C'A'$ සහ $A'B'$ ඇඳීමෙන් $A'B'C'$ නම් වෙනත් ත්‍රිකෝණයක් අඳිනු ලැබේ. BC ට සමාන්තරව A' හරහා ඇඳි රේඛාව X හිදී $B'C'$ හමුවන අතර CA ට සමාන්තරව B' හරහා ඇඳි රේඛාව Y හිදී $C'A'$ හමුවේ. $A'X$ සහ $B'Y$ රේඛා G හිදී ඡේදනය වේ. $C'G$ සහ BA සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

2.



$ABCD\,A'B'C'D'$ යනු දාරවල දිග a වූ ඝනකයකි. P වූ කලී $BP = \lambda.PB'$ වන පරිදි BB' දාරය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AD' රේඛාව සහ P ලක්ෂ්‍යය අඩංගු තලය $B'C'$ දාරය Q හිදී හමුවේ. $C'Q = \lambda.QB'$ බව පෙන්වන්න.

තව ද, a සහ λ ඇසුරෙන්

(අ) PQ හි දිග, (ආ) $\cos A\hat{P}Q$, (ඇ) $APQD'$ හි වර්ගඵලය,
සොයන්න.

3. $ax + by + c = 0$ රේඛාව මත (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

$ABCD$ යනු $B \equiv (1, 0)$ සහ AB, AC හි සමීකරණ පිළිවෙලින් $y - x + 1 = 0$ සහ $y - 3x = 0$ වන සේ වූ රොම්බසයකි. DA, CD සහ BC රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

තව ද, $ABCD$ රොම්බසයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය මත පිහිටි Q_1, Q_2 ලක්ෂ්‍ය හරහා වූ ස්පර්ශක $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ හිදී හමුවේ. P_0 ලක්ෂ්‍යයෙහි Q_1Q_2 ස්පර්ශ ජ්‍යායෙහි සමීකරණය

$$x x_0 + y y_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \text{ සහ } x^2 + y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$$

වෘත්තවලට අනුබද්ධව $(1, -2)$ ලක්ෂ්‍යයේ ස්පර්ශ ජ්‍යායන් සම්පාත වන බව සාධනය කරන්න.

තව ද, ඉහත දක්වූ වෘත්තවලට අනුබද්ධව ස්පර්ශ ජ්‍යායන් එකම වන පරිදි වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක් තිබෙන බව පෙන්වා, එහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න

5. (i) O ධ්‍රැවයේ සිට දී ඇති (O හරහා නොයන) l සරල රේඛාවකට ඇඳි ලම්බය, ආරම්භක රේඛාව සමග α කෝණයක් සාදන අතර එහි දිග d වේ. l හි සමීකරණය $r = d \sec (\theta - \alpha)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $r \cos \theta = 3$ සහ $r \sin \theta = 4$ සමීකරණවලින් සරල රේඛා දෙකක් නිරූපනය කෙරෙන බව පෙන්වා

(අ) ඒවා අතර කෝණය ද,

(ආ) ඡේදන ලක්ෂයේ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

(ii) එකම රූප සටහනෙහි,

(අ) $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0,$

(ආ) $x^2 - 4y = 0,$

(ඇ) $y - x + 1 = 0$

වක්‍රවල කටුසටහන් අඳින්න.

$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leqslant 0, x^2 - 4y \geqslant 0$ සහ $y - x + 1 \geqslant 0$ අසමානතා සපුරාලන්නාවූ, $x - y$ තලයේ R පෙදෙස සටහන් කරන්න. R තුළ $x^2 + y^2$ හි වැඩිතම අගය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $(at_1^2, 2at_1)$ සහ $(at_2^2, 2at_2)$ ලක්ෂවල දී ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂය $\{ at_1t_2, a(t_1 + t_2) \}$ බව පෙන්වන්න.

$(at^2, 2at)$ ලක්ෂයෙහි ස්පර්ශකය $P \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂය හරහා වූ ස්පර්ශකය සමග α කෝණයක් සාදයි නම්

$$t^2(1 - T^2 \tan^2 \alpha) - 2Tt \sec^2 \alpha + T^2 - \tan^2 \alpha = 0$$

සමීකරණයෙන් t ගෙන දෙන බව පෙන්වන්න.

එවැනි ස්පර්ශක දෙකක් පවතින බව අපෝහනය කර, ඒවායේ Q ඡේදන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක, T සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

PQ හි සමීකරණය

$$y - 2aT = - \frac{2T}{1 - T^2} (x - aT^2)$$

බව ද පරාවලය මත P චලනය වන විට එය අචල ලක්ෂයක් හරහා යන බව ද පෙන්වන්න.

7. $P \equiv \left\{ \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2} , \frac{2b t}{1 + t^2} \right\}$ ලක්ෂය $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$b(1 - t^2) x + 2aty = (1 + t^2)ab$$

බව ද පෙන්වන්න.

ඉලිප්සය මත වූ Q ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක

$\left\{ \frac{-2at}{1 + t^2} , \frac{b(1 - t^2)}{1 + t^2} \right\}$ වෙයි. Q හි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියන්න.

තව ද, t විචලනය වන විට, (අ) $OP^2 + OQ^2$ (ආ) OPQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය නියතව පවතින බව ද පෙන්වන්න; මෙහි O යනු මූල ලක්ෂය යි.

P සහ Q හිදී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක එකිනෙකට T හිදී හමුවේ. t විචලනය වන විට, T ලක්ෂය වෙනත් ඉලිප්සයක් මත පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

8. $x^2 - y^2 = a^2$ බහුවලයේ විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා එහි, S, S' නාභිවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න. තව ද, S සහ S' ට අනුරූප නියාමකයන්ගේ සමීකරණ ද ලියන්න.

සුදුසු පරිදි ඛණ්ඩාංක අක්ෂ කුලකයක් තෝරා ගැනීමෙන් බහුවලයේ සමීකරණය $xy = \frac{a^2}{2}$ ලෙස ගත හැකි බව පෙන්වා නාභි දෙකෙහි ඛණ්ඩාංක ද අනුරූප නියාමකවල සමීකරණ ද ලියන්න.

සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයක ස්පර්ශෝන්මුඛ දෙකට S නාභියේ සිට ඇඳි ලම්බවල අඩි L සහ M වෙයි. LM යනු S ට අනුරූප වූ නියාමකය බව පෙන්වන්න.

SL රේඛාව N හි දී බහුවලය හමුවේ නම්, N හිදී බහුවලයට ඇඳි ස්පර්ශකය M හරහා යන බව පෙන්වන්න.

5. (i) O ධ්‍රැවයේ සිට දී ඇති (O හරහා නොයන) l සරල රේඛාවකට ඇඳි ලම්බය, ආරම්භක රේඛාව සමග α කෝණයක් සාදන අතර එහි දිග d වේ. l හි සමීකරණය $r = d \sec (\theta - \alpha)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $r \cos \theta = 3$ සහ $r \sin \theta = 4$ සමීකරණවලින් සරල රේඛා දෙකක් නිරූපනය කෙරෙන බව පෙන්වා

(අ) ඒවා අතර කෝණය ද,

(ආ) ඡේදන ලක්ෂයේ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ද
සොයන්න.

(ii) එකම රූප සටහනෙහි,

(අ) $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0,$

(ආ) $x^2 - 4y = 0,$

(ඇ) $y - x + 1 = 0$

වක්‍රවල කටුසටහන් අඳින්න.

$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leqslant 0$, $x^2 - 4y \geqslant 0$ සහ $y - x + 1 \geqslant 0$ අසමානතා සපුරාලන්නාවූ, x - y තලයේ R පෙදෙස සටහන් කරන්න. R තුළ $x^2 + y^2$ හි වැඩිතම අගය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $(at_1^2, \ 2at_1)$ සහ $(at_2^2, 2at_2)$ ලක්ෂවල දී ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂය $\{ at_1t_2, \ a(t_1 + t_2) \}$ බව පෙන්වන්න.

$(at^2, 2at)$ ලක්ෂයෙහි ස්පර්ශකය $P \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂය හරහා වූ ස්පර්ශකය සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම්

$$t^2(1 - T^2 \tan^2 \alpha) - 2Tt \sec^2 \alpha + T^2 - \tan^2 \alpha = 0$$

සමීකරණයෙන් t ගෙන දෙන බව පෙන්වන්න.

එවැනි ස්පර්ශක දෙකක් පවතින බව අපෝහනය කර, ඒවායේ Q ඡේදන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක, T සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

PQ හි සමීකරණය

$$y - 2aT = - \frac{2T}{1 - T^2} (x - aT^2)$$

බව ද පරාවලය මත P චලනය වන විට එය අචල ලක්ෂයක් හරහා යන බව ද පෙන්වන්න.

7. $P \equiv \left\{ \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2} \ , \ \frac{2b\ t}{1 + t^2} \right\}$ ලක්ෂය $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$b(1 - t^2)\, x + 2aty = (1 + t^2)ab$$

බව ද පෙන්වන්න.

ඉලිප්සය මත වූ Q ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක

$\left\{ \frac{-2at}{1 + t^2} \ , \ \frac{b(1 - t^2)}{1 + t^2} \right\}$ වෙයි. Q හි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියන්න.

තව ද, t විචලනය වන විට, (අ) $OP^2 + OQ^2$ (ආ) OPQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය නියතව පවතින බව ද පෙන්වන්න; මෙහි O යනු මූල ලක්ෂය යි.
P සහ Q හිදී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක එකිනෙකට T හිදී හමුවේ. t විචලනය වන විට, T ලක්ෂය වෙනත් ඉලිප්සයක් මත පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

8. $x^2 - y^2 = a^2$ බහුවලයේ විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා එහි, S, S' නාභිවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න.
තව ද, S සහ S' ට අනුරූප නියාමකයන්ගේ සමීකරණ ද ලියන්න.

සුදුසු පරිදි ඛණ්ඩාංක අක්ෂ තලයක් තෝරා ගැනීමෙන් බහුවලයේ සමීකරණය $xy = \frac{a^2}{2}$ ලෙස ගත හැකි බව පෙන්වා නාභි දෙකෙහි ඛණ්ඩාංක ද අනුරූප නියාමකවල සමීකරණ ද ලියන්න.

සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයක ස්පර්ශෝන්මුඛ දෙකට S නාභියේ සිට ඇඳි ලම්බවල අඩි L සහ M වෙයි. LM යනු S ට අනුරූප වූ නියාමකය බව පෙන්වන්න.

SL රේඛාව N හි දී බහුවලය හමුවේ නම්, N හිදී බහුවලයට ඇඳි ස්පර්ශකය M හරහා යන බව පෙන්වන්න.